На правах рукописи

Смирнова Елена Николаевна

ОСНОВЫ ДВОЙСТВЕННОЙ ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНОГО ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.04 – геометрия и топология

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2012

Работа выполнена на кафедре геометрии ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Столяров Алексей Васильевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Малаховский Владислав Степанович

кандидат физико-математических наук,
профессор
Султанов Адгам Яхиевич

Ведущая организация: Тверской государственный университет

Защита состоится 24 мая 2012 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д. 212. 081. 10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд.337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «____» апреля 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е. К.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Постановка вопроса и актуальность темы.

Известно, что геометрия распределений m-мерных линейных элементов (неголономная геометрия) тесно связана с проблемой Пфаффа [39], то есть с проблемой описания интегральных многообразий максимальной размерности для системы уравнений Пфаффа

$$\theta^a = 0, a = \overline{1, n-m}, \qquad (*)$$

задаваемой набором n-m форм Пфаффа θ^a в некоторой области U однородного пространства M_n, линейно независимых в каждой точке $x \in U$; с геометрической точки зрения система (*) определяет распределение m-мерных линейных элементов Δ_x [17], [18]:

$$\Delta_x = \{\eta \in T_x(M_n), \theta_x^a(\eta) = 0\}.$$

Важность проблемы Пфаффа, а следовательно, и актуальность изучения геометрии распределений определяется тем, что систему дифференциальных уравнений в частных производных всегда можно трактовать как пфаффову систему [12], [27], то есть задача об интегрировании любой конечной системы дифференциальных уравнений с частными производными эквивалентна задаче об интегрировании некоторой системы Пфаффа.

Некоторые задачи движения механических систем, подчиненных добавочным линейным неголономным связям, задаваемым, например, неинтегрируемой системой уравнений Пфаффа, в пространстве конфигураций механической системы приводят к понятию неголономного многообразия (см., например, работы В.В. Вагнера [4], [5], А.В. Гохмана [10], П.К. Рашевского [27], С.А. Чаплыгина [35]).

Наряду с этим к понятию неголономного многообразия математики пришли и независимо от задач механики путем обобщения основных положений геометрии подпространств на случай, когда поле m-мерных пучков направлений не задает семейства m-мерных подпространств (см. работы В.В. Вагнера [3], [6], Д.М. Синцова [28], Схоутена [40], монографии Врэнчану [41] и Михэйлеску [38]).

В 70-х годах прошлого века теория распределений m-мерных касательных элементов в пространстве представления некоторой группы Ли, а также обобщенная теория распределений m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности $P_{n,n}$ (в частности, в проективном пространстве P_n) получили дальнейшее развитие в инвариантной аналитической форме в работах Г.Ф. Лаптева, Н.М. Остиану (см. [16], [17], [23], [24]); в случае распределений гиперплоскостных элементов в пространствах со связностью без кручения эта теория получила свое отражение в работах В.И. Близникаса [1], [2]. Ю.Г. Лумисте [18] исследует распределения на однородных пространствах, названных им пространствами проективного типа. А.П. Норден [21], [22] устанавливает связь теории многочленных композиций с теорией распределений.

А.В. Столяров [30] впервые ввёл понятие гиперполосного распределения в n-мерном проективном пространстве P_n как пары распределений первого рода – распределение m-мерных линейных элементов $\{A, \pi_m\}$ ($m<n-1$) и распределение

гиперплоскостных элементов $\{A,\pi_{n-1}\}$ с полем общего центра A и отношением инцидентности соответствующих элементов: $A \in \pi_m \subset \pi_{n-1}$.

В исследовании оснащенных подмногообразий, погруженных в однородные и обобщенные пространства, важное место занимает теория связностей в различных расслоенных пространствах.

История теории связностей начинается с 1917 года с работы Т. Леви-Чивита [37] о параллельном перенесении вектора в римановой геометрии. В 1918 году Г. Вейль [42] для построения единой теории поля ввел понятие пространства аффинной связности.

Новый этап в развитии теории связностей открыли работы Э. Картана [11] в 20-х годах XX века, в которых касательные векторные пространства заменялись аффинными, проективными или конформными пространствами. В 1950 году В. В. Вагнер [8] и Ш. Эресман [36] независимо друг от друга ввели общее понятие связности в расслоенном пространстве.

А. П. Норден [19], [20] разработал метод нормализации, позволяющий в касательных расслоениях подмногообразий проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Г. Ф. Лаптев [14], следуя идеям Э. Картана, линейные связности определяет как множества отображений бесконечно близких слоев расслоения, соответствующих касательным векторам базисного многообразия.

Используя двойственный характер геометрии проективного пространства P_n, А. П. Норден [20], В. В. Вагнер [7], А. В. Чакмазян [34], Ю. И. Попов [26], М. А. Василян [9] и другие получили ряд глубоких результатов по изучению некоторых вопросов двойственной геометрии нормализованной гиперповерхности $V_{n-1} \subset \mathrm{P}_n$, гиперполосы $H_m \subset P_n$, нормализованного пространства P_n.

В работе А.В. Столярова [31], используя данное им определение двойственных пространств с линейной связностью с точки зрения инволютивных преобразований структурных форм их связностей, значительно расширена двойственная теория оснащенных многообразий, погруженных в пространство проективной связности $P_{n,n}$.

Согласно А. П. Нордену [20], пространством n измерений с проективной метрикой или пространством K_n называется такое пространство, образом точки которого является точка проективного пространства, а фундаментальной группой – подгруппа проективных преобразований, сохраняющих некоторый поляритет (абсолют). Этот поляритет называется абсолютным поляритетом пространства K_n. В монографии А. П. Нордена изучаются некоторые вопросы геометрии пространства K_n с невырожденным абсолютом Q_{n-1}. В случае, когда абсолют Q_{n-1} овального типа, поляритет называется гиперболическим.

Гиперболическое пространство K_n имеет особое значение в геометрии, ибо оно представляет собой проективную интерпретацию геометрии Лобачевского. С помощью этой интерпретации Ф. Клейн дал строгое доказательство её непротиворечивости.

Г.Ф. Лаптев [13] вводит понятие пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$: пространство $K_{n,n}$ есть пространство проективной связности

$P_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1}^2 (локальных абсолютов). А.В. Столяровым [32] найдено инвариантное аналитическое условие, при выполнении которого пространство $P_{n,n}$ становится пространством $K_{n,n}$.

Объектом исследования настоящей работы являются:

1) гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H, погруженное в проективно-метрическое пространство K_n (глава I);

2) гиперполоса в пространстве K_n (глава I);

3) квадратичное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов, погруженное в проективно-метрическое пространство K_n (глава II).

Эти исследования являются актуальными и представляют большой научный интерес, ибо:

1) изучение двойственной геометрии неголономной гиперполосы (то есть гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов) в проективно-метрическом пространстве K_n до настоящего времени находилось в начальной стадии;

2) исследования по разработке двойственной теории квадратичных неголономных гиперполос, вложенных в пространство K_n, ранее геометрами не проводились.

Цель работы. Целью настоящего диссертационного исследования является разработка теории гиперполос и гиперполосных распределений m-мерных линейных элементов, в частности, теории квадратичных гиперполосных распределений, погруженных в проективно-метрическое пространство K_n. Достижение поставленной цели включает в себя решение следующих ключевых задач:

1) внутренним инвариантным образом построить основы двойственной и полярной геометрий регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H и m-мерной гиперполосы H_m в K_n; при исследовании m-мерной гиперполосы H_m в K_n изучаются те факты геометрии распределения H, которые определяются подпоследовательностью фундаментальных подобъектов $\{\Lambda_{ij}^n\}, \{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk_1}^n\}, \{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk_1}^n, \Lambda_{ijk_1k_2}^n\}$ многообразия H (с привлечением полей объектов $\{\Lambda_{ij}^v, \Lambda_{ij_1}^n\}, \{N_{vj}^i\}$);

2) в проективно-метрическом пространстве K_n построить основы двойственной геометрии регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов, центр A которого принадлежит абсолюту пространства K_n (квадратичное гиперполосное распределение).

Методы исследования. В диссертационной работе используются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [13], метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [33] и метод нормализации А. П. Нордена [20]. Использование указанных методов позволило:

1) исследование геометрии оснащенных подмногообразий пространства K_n провести инвариантным образом путем построения и изучения полей геометрических объектов, охваченных полями фундаментальных и оснащающих объектов;

2) изучать дифференциально-геометрические факты исследуемых подмногообразий, связанные с дифференциальными окрестностями до третьего порядка включительно.

Все исследования проведены в минимально специализированных системах отнесения, что позволило получить результаты в инвариантной форме.

Результаты по геометрии связностей получены с применением теории связностей в расслоенных пространствах в форме, данной Г. Ф. Лаптевым [13], [15], [25].

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационном исследовании в ходе решения поставленных задач, являются новыми. Научная новизна обусловлена тем, что до настоящего времени в математической литературе геометрия гиперполосного распределения и гиперполос, погруженных в проективно-метрическое пространство K_n, оставалась практически не разработанной. Кроме того, впервые рассмотрено квадратичное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа имеет теоретическое значение. Полученные в ней результаты дополняют исследования по изучению оснащенных подмногообразий, погруженных в проективно-метрическое пространство K_n, и могут быть использованы при дальнейшем изучении различных подмногообразий (как голономных, так и неголономных), погруженных в пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ [32].

Теория, разработанная в диссертации, может быть использована в качестве специальных и факультативных лекционных курсов для студентов старших курсов и аспирантов математических факультетов, а также при выполнении ими курсовых, дипломных и научных работ.

Апробация. Основные результаты диссертации доказывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях по современным проблемам геометрии:

– на заседаниях научно-исследовательского семинара молодых исследователей при кафедре геометрии Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (г. Чебоксары, 2005 – 2012 гг.);

– на научных конференциях аспирантов, докторантов и научных сотрудников Чувашского государственного педагогического университета имени И. Я. Яковлева (г. Чебоксары, 2005 – 2011 гг.);

– на 4-ой, 6-ой, 7-ой, 8-ой, 9-ой молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2005-2010 гг.);

– на V Республиканском конкурсе научно-исследовательских работ студентов, аспирантов, молодых учёных и научно-технических работников (Чебоксары, 2008 г.);

– на XVII Международной конференции « Математика. Образование » (Чебоксары, 2009 г.);

– на международной конференции “Геометрия в Одессе – 2010” (Одесса, 2010г.).

Публикации. Основные научные результаты, включенные в диссертационную работу, опубликованы в 21 печатной работе автора (см. [1] – [21]).

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Все опубликованные научные работы по теме исследования выполнены без соавторов.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения (исторический обзор, общая характеристика и содержание диссертации), двух глав и списка литературы, включающего 123 наименования. Полный объем диссертации составляет 127 страниц машинописного текста.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **первой главе** строятся основы двойственной теории регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H и регулярной m-мерной гиперполосы H_m в проективно-метрическом пространстве K_n.

В § 1 приводится материал реферативного характера, необходимый в дальнейшем изложении. Здесь приведены определение проективно-метрического пространства и уравнение его абсолюта.

В §2, п.1 приведены понятия гиперполосного распределения H m-мерных линейных элементов, регулярного и взаимного гиперполосных распределений, а также дана их геометрическая характеристика.

В п.2 §2 методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева [13] в первых трех дифференциальных окрестностях элемента распределения H пространства K_n построены поля геометрических объектов, необходимых в дальнейшем исследовании.

В § 3 найдено поле соприкасающихся гиперквадрик для гиперполосного распределения H и в случае симметрии тензора Λ_{ij}^n доказано, что обращение в нуль тензора Дарбу есть условие соприкосновения третьего порядка поля соприкасающихся гиперквадрик с базисным распределением гиперполосного распределения H в K_n (теорема I.1).

В § 4 (п.1, 2) получен один из центральных результатов первой главы (теорема I.3):

в проективно-метрическом пространстве K_n с абсолютом Q_{n-1}^2 регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H инвариантным внутренним образом индуцирует:

1) в третьей дифференциальной окрестности проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$, двойственное K_n относительно инволютивного преобразования структурных форм;

2) во 2-й дифференциальной окрестности образующего элемента распределения многообразие $\overline{H}$ в $\overline{K}_n$, двойственное исходному распределению H.

В §4, п.4 в разных дифференциальных окрестностях найдены внутренние инвариантные оснащения в смысле Нордена– Чакмазяна гиперполосного распределения H, в п.5 во второй дифференциальной окрестности приводятся примеры построения полей инвариантных двойственных нормалей распределения H в K_n.

Для регулярного гиперполосного распределения H, нормализованного полями квазитензоров $a_n^i,\ G_i$, найдены (§5) двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые нормализацией $\{a_n^i, G_i\}$, причем связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ обобщенно сопряжены относительно поля основного тензора Λ_{ij}^n вдоль любой кривой, принадлежащей базисному распределению многообразия H. Пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,m}$ (пространство $\overset{2}{A}_{n,m}$) имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда распределение нормалей первого рода $N_{n-m}(\nu)$ (второго рода $N_{m-1}(\nu)$) является голономным (теорема I.8).

§6 посвящен нахождению полярного образа гиперполосного распределения H m-мерных линейных элементов относительно абсолюта Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n. Доказано центральное утверждение этого параграфа (теорема I.9):

при задании в проективно-метрическом пространстве K_n с абсолютом Q_{n-1}^2 регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H ($m < n-1$) индуцируются полярные исходному гиперполосные распределения $\widetilde{H}$ и $\breve{H}$, базисными распределениями которых являются распределение m-мерных линейных элементов или распределение $(n-m-1)$-мерных линейных элементов соответственно, а оснащающее распределение представляет собой распределение гиперплоскостных элементов, у которого текущий элемент есть поляра центра A_0 исходного подмногообразия H.

Кроме того, в случае обращения в нуль тензора $a_{i\nu}$ справедливы следующие утверждения (теорема I.11, I.11*, I.12):

1) если исходное распределение H является регулярным, то и полярные распределения $\widetilde{H}$ и $\breve{H}$ также регулярные;

2) если гиперполосное распределение H взаимное, то и полярное распределение $\widetilde{H}$ также будет взаимным;

3) распределение $\breve{H}$ взаимное;

4) если исходное распределение H является голономным, то и полярное распределение $\widetilde{H}$ также голономное.

В §7 исследуется связь между нормалями первого и второго родов, заданных на полярных гиперполосных распределениях m-мерных линейных элементов H и $\widetilde{H}$ и доказывается следующее важное утверждение (теорема I.15):

двойственная нормализация исходного регулярного гиперполосного распределения H m-мерных линейных элементов, заданного в проективно-метрическом пространстве K_n с абсолютом Q_{n-1}^2 и допускающего обращение в нуль тензора $a_{i\nu}$, определяет двойственную нормализацию полярного относительно абсолюта Q_{n-1}^2 распределения $\widetilde{H}$ m-мерных линейных элементов.

В п.1 §8 приведены основные понятия и уравнения, связанные с гиперполосой; в п.2 доказано утверждение (теорема I.16), аналогичное теореме I.2 (§ 4 п.1):

регулярная гиперполоса H_m проективно-метрического пространства K_n с абсолютом Q^2_{n-1} индуцирует:

1) в третьей дифференциальной окрестности проективное пространство $\overline{P}_n$ (V_m), двойственное $K_n(V_m)$ относительно инволютивного преобразования структурных форм;

2) во второй дифференциальной окрестности двойственную m-мерную гиперполосу $\overline{H}_m$.

Найдены аффинные связности (§8 п.3), индуцируемые на двойственно нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset K_n$ и доказаны следующие утверждения:

1. на двойственно нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset K_n$ в касательном расслоении $T_m(H_m)$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, причем эти связности сопряжены относительно поля главного фундаментального тензора Λ^n_{ij} гиперполосы (теорема I.17);

2. связность $\overset{\circ}{\nabla}$, средняя по отношению к $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, является вейлевой с полем невырожденного метрического тензора Λ^n_{ij}; связность $\overset{\circ}{\nabla}$ является римановой тогда и только тогда, когда обращается в нуль кососимметричный тензор T_{st} (теорема I.18) ;

3. аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ одновременно эквиаффинны тогда и только тогда, когда кососимметричный тензор T_{st} обращается в нуль. Средняя связность $\overset{\circ}{\nabla}$ в этом случае является римановой (теорема I.19) ;

4. аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация гиперполосы $H_m \subset K_n$ полями квазитензоров $\{\nu^i_n, \nu_i\}$ является полярной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик и гиперполоса H_m имеет соприкосновение третьего порядка с гиперквадриками этого поля (теорема I.20).

В п.п.4,5 §8 для гиперполосы H_m в K_n найдена полярная относительно абсолюта гиперполоса $\widetilde{H}_m$.

В **<u>главе II</u>** диссертации изучается двойственная геометрия квадратичного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H, погруженного в проективно-метрическое пространство K_n.

В §1 введено понятие квадратичного гиперполосного распределения, выведены дифференциальные уравнения подмногообразия H, приведены поля его фундаментальных и некоторых охваченных геометрических объектов. Параллельно с квадратичным гиперполосным распределением m-мерных линейных элементов H вводится в рассмотрение квадратичное гиперполосное распределение $\widetilde{H}$ с базисным распределением *(n-m-1)*-мерных характеристик.

§2 посвящен доказательству существования двойственных образов квадратичных гиперполосных распределений. Центральным результатом §2 является утверждение (объединение теорем II.1 и II.2):

квадратичное гиперполосное распределение *m*-мерных линейных элементов *H*, погруженное в проективно-метрическое пространство K_n, в 1-й дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует:

1) тангенциальное проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$, двойственное исходному K_n относительно инволютивного преобразования структурных форм;

2) квадратичные гиперполосные распределения $\overline{H}$ в $\overline{K}_n$ и $\overline{\widetilde{H}}$ в $\overline{K}_n$, двойственные исходным распределениям *H* и $\widetilde{H}$ соответственно.

В §3 строятся и изучаются инвариантные оснащения квадратичных распределений *H* и $\widetilde{H}$ в смысле А.П. Нордена (п.1), Э. Картана (п.2) и Э. Бортолотти (п.3).

В п.1 доказано, что для нормализованных в смысле А.П. Нордена полями квазитензоров $\{\nu_n^i, \nu_i^0\}, \{\nu_n^v, \nu_v^0\}$ квадратичных гиперполосных распределений *H* и $\widetilde{H}$ соответственно справедливы следующие предложения:

1. в каждом центре A_0 нормали первого рода N_{n-m} и N_{m+1} полярно сопряженных квадратичных гиперполосных распределений соответственно H и $\widetilde{H}$ пересекаются по прямой $h \equiv [A_0 N_n]$, где

$$N_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^v A_v;$$

2. нормализация одного из регулярных квадратичных распределений H в K_n и $\overline{H}$ в $\overline{K}_n$ равносильна нормализации другого;

3. условием взаимности (полярной сопряженности) относительно абсолюта полей нормалей I и II родов на распределении H в K_n является выполнение следующих соотношений:

$$\nu_i^0 = -\left(g_{ij}\nu_n^j + g_{in}\right);$$

4. аналогично, если на квадратичном гиперполосном распределении $\widetilde{H}$ в K_n заданы поля инвариантных нормалей первого рода $N_{m+1} \supset \pi_m$ и второго рода $N_{n-m-2} \subset \pi_{n-m-1}$, определяемые соответственно полями квазитензоров ν_n^v и ν_v^0, то условие их взаимности относительно абсолюта проективно-метрического пространства имеет вид:

$$\nu_u^0 = -\left(g_{uv}\nu_n^v + g_{un}\right);$$

5. нормализация Нордена-Чакмазяна квадратичного распределения H в K_n ($\widetilde{H}$ в K_n) взаимна относительно абсолюта Q_{n-1}^2 пространства K_n тогда и только тогда, когда взаимна нормализация двойственного образа $\overline{H}$ в $\overline{K}_n$ ($\overline{\widetilde{H}}$ в $\overline{K}_n$) относительно абсолюта $\overline{Q}_{n-1}^2$ пространства $\overline{K}_n$.

Относительно оснащения в смысле Э. Картана (§3 п.2) квадратичного гиперполосного распределения справедливы следующие предложения:

1. нормаль второго рода $N_{n-m-2}(A_0)$ на квадратичном гиперполосном распределении $\widetilde{H}$ можно принять за ось оснащающей плоскости Картана $N_{n-m-1}(A_0)$ на квадратичном распределении H;

2. оснащение квадратичного гиперполосного распределения H в смысле Э. Картана влечет за собой оснащение подмногообразия H полем нормалей первого рода, а также нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна квадратичного распределения $\widetilde{H}$;

3. если на распределении H задано поле нормалей первого рода, индуцируемое полем нормалей ν_n^i, то такое оснащение подмногообразия H определяет его оснащение в смысле Э. Картана, так как в качестве одного из возможных охватов функции ν_n^0 можно взять:

$$\nu_n^0 = -\frac{1}{m}\left(\nu_{ni}^i + g_{ij}\nu_n^i\nu_n^j\right) + a_u^0 a_n^u;$$

при таком охвате функции ν_n^0 оснащающая плоскость называется плоскостью Кёнигса нормали ν_n^i.

В п.3 доказаны утверждения относительно оснащения в смысле Бортолотти квадратичного гиперполосного распределения:

1. на квадратичном гиперполосном распределении m-мерных линейных элементов H ($m > 1$) оснащающая гиперплоскость Бортолотти $N_{n-1}(A_0)$ неподвижна тогда и только тогда, когда она “вращается” вокруг нормали второго рода $N_{m-1}(A_0)$ (теорема II .6);

2. если на квадратичном гиперполосном распределении H оснащающая гиперплоскость Бортолотти $N_{n-1}(A_0)$ неподвижна, то она в каждом центре A_0 является гиперплоскостью Кёнигса нормали a_i^0 второго рода (теорема II .7).

Центральным предложением §4, посвященного изучению аффинных связностей на квадратичных гиперполосных распределениях H и $\widetilde{H}$, является теорема II.8:

на нормализованном квадратичном гиперполосном распределении m-мерных линейных элементов H в K_n индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, причем эти связности:

1) совпадают тогда и только тогда, когда нормализация $\{\nu_n^i, \nu_i^0\}$ подмногообразия H является взаимной относительно абсолюта Q_{n-1}^2;

2) имеют нулевое кручение тогда и только тогда, когда квадратичное гиперполосное распределение $\widetilde{H}$ голономно, т.е. $N_{[uv]}^i = 0$.

Доказано, что:

1. двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ на нормализованном квадратичном гиперполосном распределении H сопряжены относительно поля тен-

зора g_{ij} вдоль любой кривой l, принадлежащей базисному распределению многообразия H (теорема II .9);

2. взаимная нормализация квадратичного гиперполосного распределения H в K_n индуцирует вейлево пространство $\overset{1}{A}_{n-1,m} \equiv \overset{2}{A}_{n-1,m}$ вдоль любой кривой l, принадлежащей базисному распределению подмногообразия H (теорема II.10).

Для квадратичного гиперполосного распределения *(n-m-1)*-мерных линейных элементов $\widetilde{H}$, нормализованного в смысле Нордена-Чакмазяна полями квазитензоров ν_n^v, ν_v^0, с точностью до замены индексов $\{i, j, k, ...\} \leftrightarrow \{u, v, w, ...\}$ и до замены функций $\Lambda_{ia}^u \leftrightarrow N_{ua}^i$ справедливы аналогичные предложения.

В §5 на оснащенном в смысле Нордена-Картана квадратичном гиперполосном распределении H в расслоении нормалей первого рода найдены шесть нормальных связностей $\overset{1-6}{\nabla}$ (теорема II.11).

Имеет место теорема II.12: если на оснащенном в смысле Нордена-Картана квадратичном гиперполосном распределении H оснащающая плоскость Картана N_{n-m-1} неподвижна, то индуцируемая в расслоении нормалей первого рода связность $\nabla^{\perp} \equiv \overset{1}{\nabla}$ является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская.

На оснащенном в смысле Нордена-Бортолотти квадратичном гиперполосном распределении H в расслоении нормалей второго рода найдена нормальная связность $\overline{\nabla}^{\perp}$ и доказано, что если на оснащенном в смысле Нордена-Бортолотти квадратичном гиперполосном распределении H оснащающая гиперплоскость Бортолотти N_{n-1} неподвижна, то индуцируемая в расслоении нормалей второго рода связность $\overline{\nabla}^{\perp}$ является плоской тогда и только тогда, когда она полуплоская (теорема II.12*).

Доказано, что поле характеристик π_{n-m-1} подмногообразия H параллельно в нормальной связности $\nabla^{\perp}$, поле m-мерных плоскостей π_m базисного распределения параллельно в нормальной связности $\overline{\nabla}^{\perp}$ (п.3).

§6 посвящен рассмотрению автополярной нормализации невырожденного абсолюта Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n. Доказано, что абсолют Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n нормализован автополярно тогда и только тогда, когда двойственные аффинные связности ∇ и $\overline{\nabla}$, индуцируемые на нормализованном абсолюте, совпадают (теорема II.13).

Автополярная нормализация невырожденного абсолюта Q_{n-1}^2 проективно-метрического пространства K_n индуцирует вейлеву связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с полем метрического тензора g_{ab} и с дополнительной формой $\overset{\circ}{\Theta} \overset{def}{=} \omega_0^0 - \omega_n^n - \nu_c^0 \omega_0^c - \nu_n^c \omega_c^n$ (теорема II.14).

Заметим, что в случае одновременного выполнения двух условий:

1) сопряженность поля нормалей первого рода абсолюту Q^2_{n-1} ($\nu^c_{n[a} g_{b]c} = 0$),

2) гармоничность поля нормалей второго рода абсолюту Q^2_{n-1} ($\nu^0_{[ab]}$=0), согласно А.П. Нордену [20], нормализация называется вполне гармоничной абсолюту Q^2_{n-1}.

Показано, что автополярная нормализация невырожденного абсолюта Q^2_{n-1} проективно-метрического пространства K_n индуцирует риманову связность $\overset{\circ}{\nabla}$ с полем метрического тензора g_{ab} тогда и только тогда, когда нормализация вполне гармонична гиперквадрике Q^2_{n-1} (теорема II.15).

В §7 главы II вводятся в рассмотрение ткани на квадратичном гиперполосном распределении и найдены некоторые приложения двойственных аффинных связностей к рассмотрению их частных классов.

Если на базисном распределении многообразия H в K_n задано $m(m \geq 2)$ линейно независимых гладких полей допустимых направлений $A_0 B_i$, где $B_i = a_i^j A_j$, $\left| a_i^j \right| \neq 0$, то линии, огибающие эти направления, принадлежат базисному распределению m-мерных линейных элементов и образуют на нем m-ткань Σ. Доказаны следующие предложения:

Теорема II.18. Квадратичное гиперполосное распределение H в K_n, несущее сопряженную относительно поля тензора g_{is} голономную m-ткань Σ ($m \geq 3$), является m -сопряженной системой в смысле Р.В.Смирнова [29].

Теорема II.19. Для квадратичного гиперполосного распределения H в K_n, несущего сопряженную относительно поля тензора g_{ik} ткань Σ, принадлежащую распределению H, поля её инвариантных гармонических плоскостей q_n^i и q_i^0 нормализуют многообразие H взаимно.

Теорема II.20. Сопряженная относительно поля тензора g_{is} m -ткань на квадратичном гиперполосном распределении H в K_n есть ткань с совпавшими псевдофокусами F_i^j (с совпавшими псевдофокальными гиперплоскостями η_i^j) тогда и только тогда, когда относительно поля её гармонических плоскостей $q_i^0 \left(q_n^i \right)$ она является геодезической тканью второго (первого) рода.

Теорема II.21. Сопряженная относительно поля тензора g_{is} чебышевская m -ткань Σ первого (второго) рода, принадлежащая распределению H в K_n, является геодезической второго (первого) рода.

Следствие. Сопряженная относительно поля тензора g_{is} чебышевская m -ткань Σ первого (второго) рода, принадлежащая распределению H в K_n, относится к классу тканей с совпавшими псевдофокусами F_i^j (псевдофокальными гиперплоскостями η_i^j).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. В проективно-метрическом пространстве K_n с абсолютом Q^2_{n-1} регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов H $(m < n-1)$ инвариантным внутренним образом индуцирует:

1) в третьей дифференциальной окрестности проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$, двойственное K_n относительно инволютивного преобразования структурных форм,

2) во 2-й дифференциальной окрестности образующего элемента распределения многообразие $\overline{H}$ в $\overline{K}_n$, двойственное исходному подмногообразию H.

2. Найдены две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$, индуцируемые на гиперполосном распределении, нормализованном полями квазитензоров $\{a^i_n, G_i\}$; получен ряд свойств этих связностей.

3. При некоторых условиях найдены гиперполосные распределения $\widetilde{H}$ m-мерных линейных элементов и $\breve{H}$ *(n-m-1)*-мерных линейных элементов полярные относительно абсолюта Q^2_{n-1} исходному распределению H в K_n, доказано, что двойственная нормализация исходного регулярного гиперполосного распределения H определяет двойственную нормализацию полярного распределения $\widetilde{H}$.

4. На двойственно нормализованной регулярной гиперполосе $H_m \subset K_n$ $(m < n-1)$ в касательном расслоении $T_m(H_m)$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения; получен ряд свойств по изучению геометрии этих связностей.

5. Построены основы двойственной теории оснащенного квадратичного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов H, погруженного в проективно-метрическое пространство K_n: двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ и их приложения к изучению геометрии m-тканей на H (чебышевские и геодезические ткани первого и второго родов), двойственные нормальные связности $\nabla^{\perp}$ и $\overline{\nabla}^{\perp}$ и т.д.

Список литературы

[1] *Близникас В. И.* Дифференциальная геометрия неголономной гиперповерхности риманова пространства / В. И. Близникас // Ziet. mat. rinkinys: лит. мат. сб., 1971. – Т. 11. – № 1. – С. 63-74.

[2] *Близникас В. И.* О неголономной поверхности трёхмерного пространства проективной связности / В. И. Близникас // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 115-124.

[3] *Вагнер В.В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий/ В.В.Вагнер // Сб. 8-го Межд. конкурса на соискание премий им. Лобачевского.– Казань, 1940. – С. 195-262.

[4] *Вагнер В.В.* Теория конгруэнций кругов и геометрия неголономного V_3^2 в R_3 / В.В.Вагнер // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу / МГУ. – 1941. – Вып. 5. – С. 271-283.

[5] *Вагнер В.В.* Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем / В.В.Вагнер // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу / МГУ. – 1941. – Вып. 5. – С. 301-327.

[6] *Вагнер В.В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве / В.В.Вагнер // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу / МГУ. – 1941. – Вып. 5. – С. 173-225.

[7] *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос / В.В.Вагнер // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. – 1950. – В. 8. – С. 197-272.

[8] *Вагнер В. В*. Теория составного многообразия / В. В. Вагнер // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – 1950. – Вып. 8. – С. 11-72.

[9] *Василян М.А.* Об инвариантном оснащении гиперполосы / М.А. Василян. // Докл. АрмССР. – 1970. – Т.50. – №2. – С.65-70.

[10] *Гохман А. В.* Дифференциальная геометрия и классическая динамика систем / А. В. Гохман // Труды Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1966. – Т. 1. – С. 111-138.

[11] *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности / Э. Картан. – Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1962. – 210 с.

[12] *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения / Э. Картан. – М.: МГУ, 1962. – 237 с.

[13] *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий / Г. Ф. Лаптев // Труды Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т.2. – С.275-382.

[14] *Лаптев Г. Ф.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований / Г. Ф. Лаптев // Труды 3-го Всес. матем. съезда.– М., 1958. – Т. 3. – С. 409-418.

[15] *Лаптев Г. Ф*. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. / Г. Ф. Лаптев // В сб. “Труды 4-го Всес. матем. съезда (1961)”. – Ленинград, 1964. – Т. 2. – С. 226-238.

[16] *Лаптев Г.Ф.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I / Г.Ф. Лаптев, Н.М. Остиану // Труды Геометрического семинара – М., 1971. – Т.3. – С.49-94.

[17] *Лаптев Г. Ф*. Распределения касательных элементов / Г. Ф. Лаптев // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 29-48.

[18] *Лумисте Ю. Г.* Распределения на однородных пространствах / Ю. Г. Лумисте // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1977. – Т. 8. – С. 5-24.

[19] *Норден А. П.* О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства / А. П. Норден // Труды семинара по векторному и тензорному анализу / МГУ. – М., 1948. – Вып. 6. – С. 125-224; Вып. 7. – С. 31-64.

[20] *Норден А. П.* Пространства аффинной связности / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[21] *Норден А. П.* Теория композиций / А. П. Норден // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. – М., 1978. – Т. 10. – С. 117-145.

[22] *Норден А. П.* Многочленные композиции и теория распределений / А. П. Норден // Известия вузов. Матем. – 1978. – №11. – С. 87-97.

[23] *Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара/ Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1971. – Т. 3. – С. 95-114.

[24] *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве / Н. М. Остиану // Тр. Геом. семинара / Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1973. – Т. 4. – С. 71-120.

[25] *Остиану Н. М.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. / Н. М. Остиану, В.В. Рыжков, П.И. Швейкин // Тр. Геом. семинара/ Ин-т научн. информ. АН СССР. – М., 1973. – Т. 4. – С. 7-70.

[26] *Попов Ю. И.* О двойственности трёхсоставных распределений / Ю. И. Попов // Калинингр. гос. ун-т. – Калининград, 2004. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 26.01.2004, №131–В2004Деп.

[27] *Рашевский П. К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными / П.К. Рашевский. – М.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.

[28] *Синцов Д. М.* Работы по неголономной геометрии / Д.М. Синцов. – Киев: Вища школа, 1972.– 294 с.

[29] *Смирнов Р.В.* Преобразования Лапласа p-сопряженных систем / Р.В. Смирнов // ДАН СССР. – 1950. – Т.71. - №3. – С.437-439.

[30] *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов / А. В. Столяров// Проблемы геометрии / Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. – 1975. – Т.7. – С.117-151.

[31] *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография / А. В. Столяров. – Чебоксары: Чувашский гос. пед. институт им. И.Я. Яковлева, 1994. – 290 с.

[32] *Столяров А. В.* Пространство проективно-метрической связности / А. В. Столяров // Известия вузов. Математика. – 2003. – №11. – С. 70-76.

[33] *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии / С. П. Фиников – М. – Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[34] *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация / А.В. Чакмазян // Докл. АН АрмССР. – 1959. – Т.28. – №4. – С. 151-157.

[35] *Чаплыгин С. А.* К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе. / С.А. Чаплыгин. – Л.: Полн. собр. соч., 1933. – Т.1. – С.212-214.

[36] *Ehresmann C.* Les connexions infinitesimals dans un éspace fibré différentiable / C. Ehresmann // Collque de Topologie (Bruxelles, 1950). – Paris, 1951. – P. 29-55.

[37] *Levi-Civita T.* Nozioni di parallelismo in una varieta qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvature Riemanniana / T. Levi-Civita // Rend. circ. matem. – Palermo, 1917, 42. – P. 173-205.

[38] *Michăilescu T.* Geometrie differentialâ projectivâ / T. Michâilescu // Bucureşti Acad. RPR, 1958. – 394 p.

[39] *Pfaff J.* – Berl. Abh. / J. Pfaff – 1814. – S. 76-135.
[40] *Schouten J. A*. Ricci Calculus / J. A. Schouten. – Berlin. 2nd ed. – 1954.
[41] *Vranceanu L.* Les èspaces non-holonomes / L. Vranceanu // Mèmorial des Sci Math., fasc. LXXXV. – Paris, 1936.
[42] *Weyl H*. Raum, Zeit, Materie / H. Weyl. – Berlin, 1918.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Смирнова Е.Н.* Оснащения по А.П.Нордену взаимно-полярных неголономных гиперполос в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2005. – №746 – В2005 – 11 с.
[2] *Смирнова Е.Н.* Номализация взаимно-полярных гиперполосных распределений в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Научно – информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. №1 (5): в 2 т. Т.1. – Чебоксары : ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2005. – С. 10–14.
[3] *Смирнова Е.Н.* Оснащения по А.П.Нордену взаимно-полярных неголономных гиперполос в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 31: материалы Четвёртой молодёжной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2005 . – С. 60–63.
[4] *Смирнова Е.Н.* Тангенциальное проективно-метрическое пространство, индуцируемое взаимной неголономной гиперполосой / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2007. – №1015 – В2007 – 18с.
[5] *Смирнова Е.Н.* Двойственная геометрия взаимной регулярной неголономной гиперполосы в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова// Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.36: материалы Шестой молодёжной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2007 . – С. 199–202.
[6] *Смирнова Е.Н.* Двойственные поля геометрических объектов на регулярной неголономной гиперполосе в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2008. – №283 – В2008 – 25 с.
[7] *Смирнова Е.Н.* Е.Н. Двойственность квадратичного гиперполосного распределения в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Научно – информационный вестник докторантов, аспирантов, студентов. №1 (11): в 2 т. Т.1. – Чебоксары : ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2008. – С. 24–29.
[8] *Смирнова Е.Н.* Квадратичное гиперполосное распределение в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Межвузовский тематический сб. науч. тр. – Калининград: Изд-во Российского гос. университета им. И. Канта, 2008. – Вып. 39 – С. 124-129.
[8] *Смирнова Е.Н.* Двойственность неголономной квадратичной гиперполосы в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.37: материалы Седьмой молодежной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2008. – С. 164-167.
[10] *Смирнова Е.Н.* Двойственные аффинные связности на квадратичном гиперполосном распределении в проективно-метрическом пространстве и их

приложения. / Е.Н. Смирнова // Наука XXI века. Сборник статей по материалам V Республиканского конкурса научно-исследовательских работ студентов, аспирантов, молодых ученых и научно-технических работников (в области естеств.-матем. и тех. наук). – Чебоксары: ЧГИГН, 2008. – С.14-18.

[11] *Смирнова Е.Н.* Внутренняя геометрия квадратичного гиперполосного распределения в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. - №4 – В2009. – 24 с.

[12] *Смирнова Е.Н.* Двойственные аффинные связности на квадратичном гиперполосном распределении в проективно-метрическом пространстве и их приложения / Е.Н. Смирнова // Известия высших учебных заведений. Математика. – Казань: Издательство Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина, 2009. - №5. – С. 73-77.

[13] *Смирнова Е.Н.* Нормальные связности на квадратичном гиперполосном распределении / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – №333–В2009. – 27 с.

[14] *Смирнова Е.Н.* Инвариантные оснащения квадратичного гиперполосного распределения / Е.Н. Смирнова // Математика. Образование: Материалы XVII международной конференции.– Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. ун-та, 2009. – С. 306.

[15] *Смирнова Е.Н.* Полярные гиперполосы в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – №524 – В2009.– 14 с.

[16] *Смирнова Е.Н.* Нормализация полярных гиперполос в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.39 : материалы Восьмой молодежной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2009. – С. 344-347.

[17] *Смирнова Е.Н.* Аффинные связности на полярных гиперполосах в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // ВИНИТИ РАН. – М., 2010. – №299 – В2010. – 27 с.

[18] *Смирнова Е.Н.* Оснащение полярной гиперполосы в проективно-метрическом пространстве. / Е.Н. Смирнова // Геометрия в Одессе – 2010: Тезисы докладов международной конференции. – Одесса: Фонд "Наука", 2010. – С. 56.

[19] *Смирнова Е.Н.* Двойственные аффинные связности на гиперполосе в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.40 : материалы Девятой молодежной науч. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2010. – С.312-315.

[20] *Смирнова Е.Н.* Двойственная нормализация полярных неголономных гиперполос в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2011. – №2(70) – Ч.I. – С.140-144.

[21] *Смирнова Е.Н.* Двойственность гиперполосного распределения в проективно-метрическом пространстве / Е.Н. Смирнова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары: ЧГПУ им. И.Я. Яковлева, 2011. – №2(70) – Ч.I. – С.145-149.

Подписано к печати 06.04.2012. Формат $60 \times 84/_{16}$.
Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1,1. Тираж 100 экз. Заказ №67.

Отдел полиграфии
ФГБОУ ВПО «Чувашского государственного педагогического университета
им. И. Я. Яковлева»
428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, 38.